Unidad 1: SISTEMAS DE ECUACIONES. MÉTODO DE GAUSS

1.1.- SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ecuación lineal

Las ecuaciones siguientes son lineales:

$2x-3=0$; $5x+4y=20$; $3x+2y+6z=6$; $5x-3y+z-5t=0$

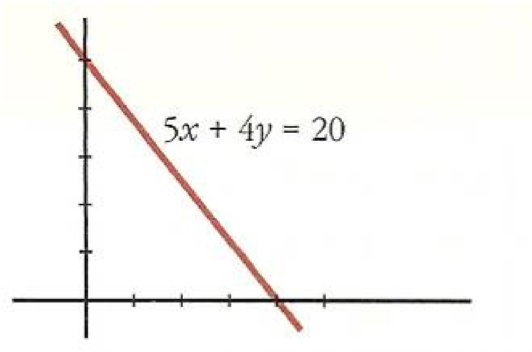
Tienen la peculiaridad de que son polinómicas de grado 1. Es decir, las incógnitas no están elevadas a ninguna potencia, ni multiplicadas entre sí, ni bajo radicales, ni en el denominador…

No son lineales:

$$2x-3y+\sqrt{z}=5;\ 3xy-2z=0;\ x+2y-\operatorname{sen} z=1$$

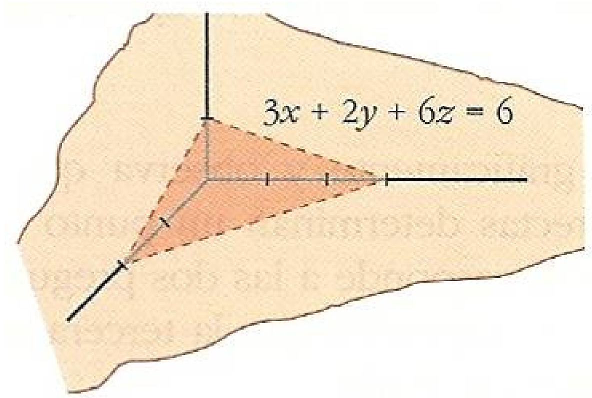
Ecuación lineal es una ecuación polinómica de grado uno con una o varias incógnitas.

Una ecuación lineal con dos incógnitas representa una recta en el plano. Los puntos de la recta son las soluciones de la ecuación.



ECUACIÓN LINEAL CON DOS INCÓGNITAS

Una ecuación lineal con tres incógnitas representa un plano en el espacio. Los puntos del plano son las soluciones de la ecuación.



ECUACIÓN LINEAL CON TRES INCÓGNITAS

Ecuaciones equivalentes

Dos **ecuaciones** son **equivalentes** cuando tienen la misma solución (o las mismas soluciones).

Si a los dos miembros de una ecuación los multiplicamos o dividimos por un mismo número distinto de cero, la ecuación resultante es equivalente a la primera.

Por ejemplo:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1 \text{ es equivalente a } 5x+4y=20$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Varias ecuaciones dadas conjuntamente con el fin de determinar la solución o soluciones comunes a todas ellas forman un **sistema de ecuaciones**.

Un sistema de ecuaciones lineales con **dos incógnitas** representa un conjunto de **rectas**. Su resolución consiste en averiguar si todas ellas tienen algún punto en común y localizarlo.

Si las ecuaciones del sistema tienen **tres incógnitas**, representan **planos**. Resolver el sistema es encontrar el punto o los puntos que tienen en común todos los planos.

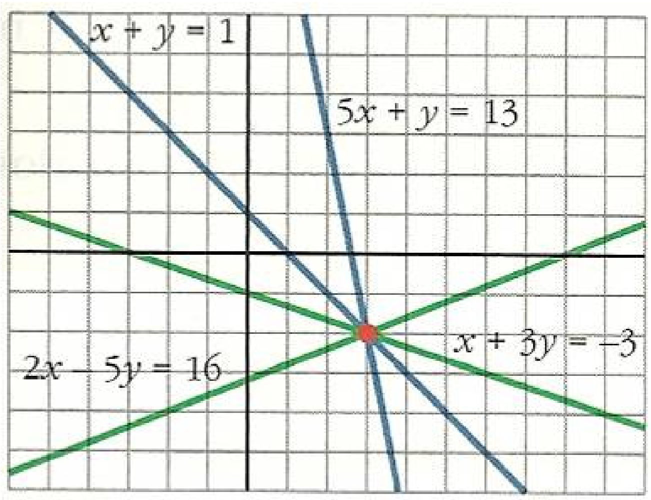
Sistemas equivalentes

Dos **sistemas de ecuaciones** son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Dos sistemas pueden ser equivalentes sin que lo sean las ecuaciones que los forman.

Por ejemplo:

$\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ x + 3y = -3 \end{cases}$ y $\begin{cases} 5x + y = 13 \\ x + y = 1 \end{cases}$ son equivalentes, pues ambos tienen la única solución $x = 3$, $y = -2$.



Transformaciones en un sistema de ecuaciones

Consideraremos válida toda transformación que pase de un sistema a otro equivalente. Por ejemplo:

1. Multiplicar o dividir los dos miembros de una de las ecuaciones por un número distinto de cero.

$$\left.\begin{array}{r} 3x+5y-z=3 \\ x-2y+z=5 \end{array}\right\} \xrightarrow{(2^a)\cdot 3} \left.\begin{array}{r} 3x+5y-\ \ z=\ \ 3 \\ 3x-6y+3z=15 \end{array}\right\}$$

2. Añadir una ecuación que sea **combinación lineal** de las demás o, al contrario, suprimir una ecuación que sea combinación lineal de las otras.

   Combinación lineal de varias ecuaciones es la ecuación que se obtiene al multiplicar cada una de ellas por un número y sumar los resultados miembro a miembro.

$$\left.\begin{array}{r} 3x+5y-z=3 \\ x-2y+z=5 \end{array}\right\} \overset{(1^a)-3\cdot(2^a)}{\longleftrightarrow} \left.\begin{array}{r} 3x+5y-\ \ z=\ \ 3 \\ x-2y+\ \ z=\ \ 5 \\ 11y-4z=-12 \end{array}\right\}$$

3. Sustituir una ecuación por el resultado de sumarle otra multiplicada por un número.

$$\left.\begin{array}{r} 3x+5y-z=3 \\ x-2y+z=5 \end{array}\right\} \xrightarrow{(1^a)-3\cdot(2^a)} \left.\begin{array}{r} 11y-4z=-12 \\ x-2y+\ \ z=\ \ 5 \end{array}\right\}$$

Se llaman **transformaciones válidas** a las que mantienen las soluciones del sistema.

En la resolución de sistemas de ecuaciones debemos realizar transformaciones que, además de válidas, sean ***convenientes***; es decir, que nos aproximen a la solución. Para ello, utilizaremos, fundamentalmente, las transformaciones 1 y 3 descritas anteriormente.

Ejercicio propuesto 1 (pág. 29)

Sin resolverlos, explica por qué son equivalentes los siguientes pares de sistemas:

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=7 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x=12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y-z=5 \\ x+y=7 \end{cases}$ $\begin{cases} z=2 \\ x+y=7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y-z=5 \\ x+y=7 \\ 2x+2y-z=12 \end{cases}$ $\begin{cases} z=2 \\ x+y=7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y-z=11 \\ x+2y-z=7 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y-z=11 \\ y=-4 \end{cases}$

1.2.- INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

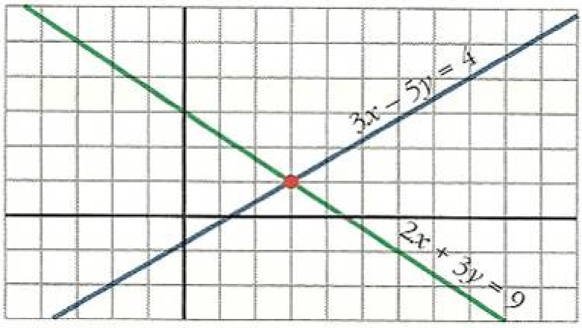
Un sistema de ecuaciones puede tener solución (**compatible**) o no tener solución (**incompatible**).

Los sistemas compatibles pueden tener una solución (**determinados**) o infinitas soluciones (**indeterminados**).

Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

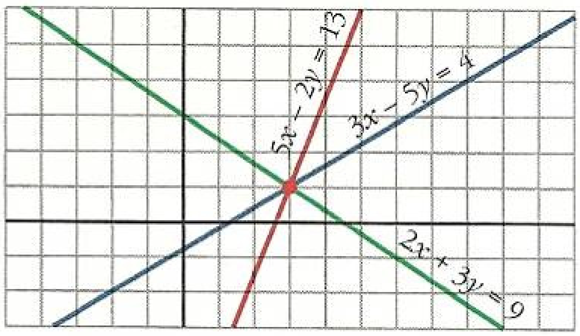
- $\left.\begin{array}{r} 2x+3y=9 \\ 3x-5y=4 \end{array}\right\}$ Este sistema de ecuaciones tiene por solución $x=3$, $y=1$. Es, pues, **compatible y determinado**.

Esto significa que las dos rectas se cortan en el punto (3, 1).



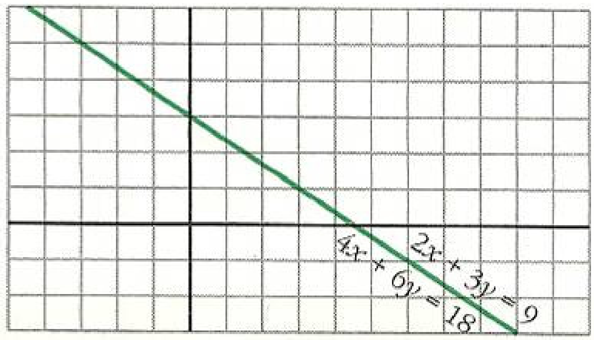
- $\left.\begin{array}{r} 2x+3y=9 \\ 3x-5y=4 \\ 5x-2y=13 \end{array}\right\}$ Este sistema es prácticamente igual que el anterior, pues las dos primeras ecuaciones son las mismas y la tercera se obtiene sumando, miembro a miembro, las anteriores.

La nueva recta (roja en el dibujo) pasa por el punto (3, 1) en que se cortan las otras dos. El sistema es, también, **compatible y determinado**.



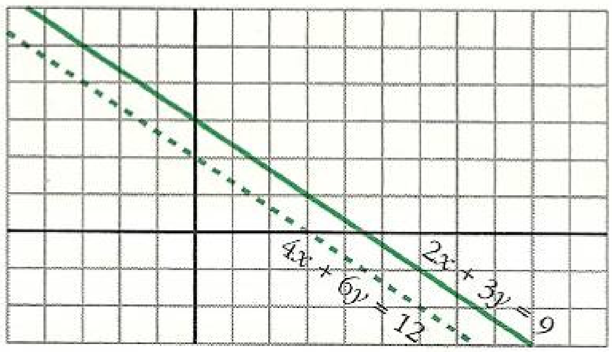
- $\left.\begin{array}{r} 2x+3y=9 \\ 4x+6y=18 \end{array}\right\}$ Las dos ecuaciones dicen lo mismo. Cada solución de una de ellas es, también, solución de la otra. Las dos rectas coinciden. Es decir, son la misma recta.

El sistema es **compatible e indeterminado**.



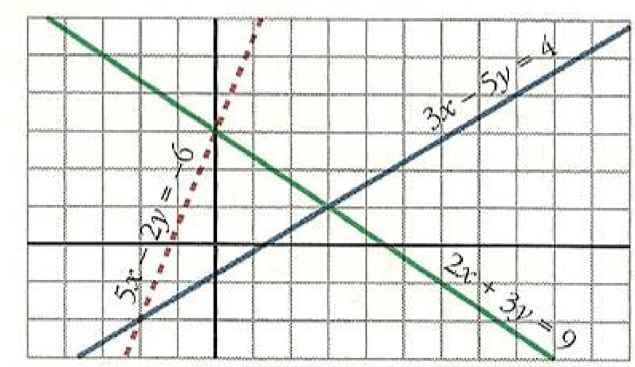
- $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=9 \\ 4x+6y=12 \end{array}\right\}$ Las ecuaciones dicen cosas contradictorias. No tienen ninguna solución común. Geométricamente: las dos rectas son paralelas, pues no tienen ningún punto común.

Este sistema carece de solución. Es **<u>incompatible</u>**. Al intentar resolverlo se llega a expresiones disparatadas.



- $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=9 \\ 3x-5y=4 \\ 5x-2y=-6 \end{array}\right\}$ Este sistema es muy parecido al segundo. Sólo cambia el término independiente de la tercera ecuación, que ya no pasa por el punto (3, 1) donde se cortan las otras dos. Las tres rectas no tienen ningún punto común.

El sistema es, pues, **<u>incompatible.</u>**



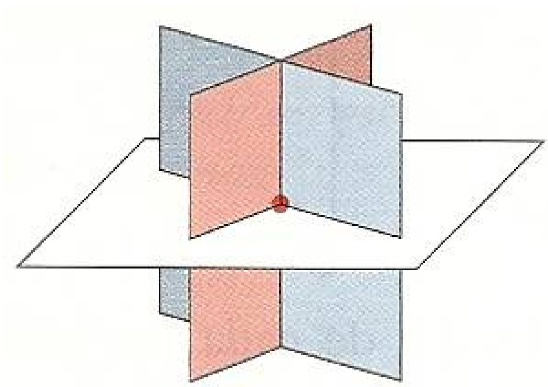
Sistemas de ecuaciones con tres incógnitas

Observemos los siguientes sistemas con sus correspondientes interpretaciones geométricas:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 11 \\ x - 3y = -20 \\ 4x + 2y + 5z = 8 \end{cases}$$

Los tres planos se cortan en un punto. El sistema es **compatible determinado**.

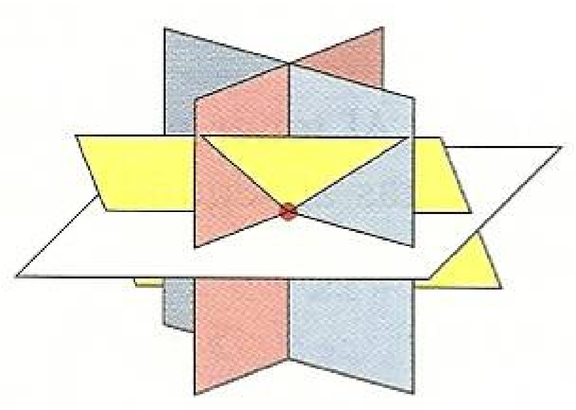
Solución: $x = 1$, $y = 7$, $z = -2$



$$\begin{cases} 2x + y - z = 11 \\ x - 3y = -20 \\ 4x + 2y + 5z = 8 \\ 7x + 4z = -1 \end{cases}$$

La cuarta ecuación es suma de las otras tres. El plano correspondiente (amarillo) pasa por el punto común. El sistema es **compatible determinado**.

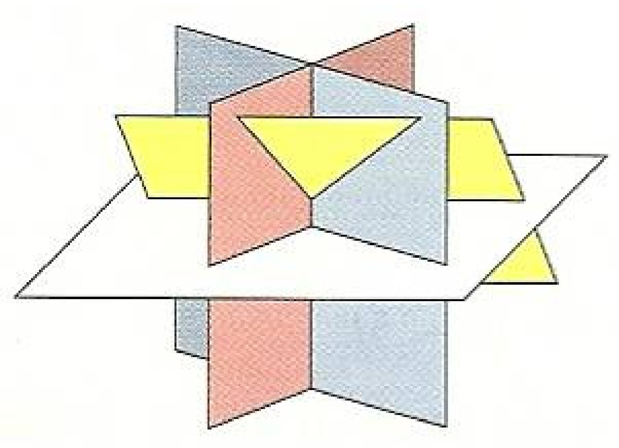
Solución: $x = 1$, $y = 7$, $z = -2$



$$\begin{cases} 2x + y - z = 11 \\ x - 3y = -20 \\ 4x + 2y + 5z = 8 \\ 7x + 4z = 3 \end{cases}$$

La cuarta ecuación contradice la suma de las otras tres. Este plano (amarillo) no pasa por el punto de corte de los otros tres. El sistema es **incompatible**.

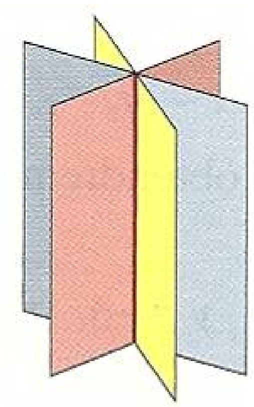
No tiene solución.



$$\begin{cases} 2x + y - z = 11 \\ x + y = -20 \\ 3x + 2y - z = -9 \end{cases}$$

La tercera ecuación, al ser suma de las otras dos, no aporta información al sistema. El sistema es **compatible indeterminado**.

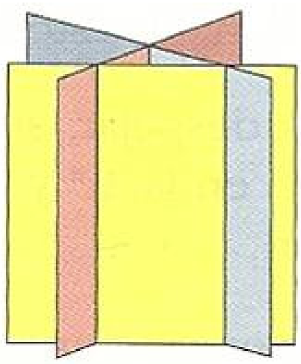
Solución: Todos los puntos de la recta donde se cortan los planos son solución del sistema.



$$\begin{cases} 2x + \ \ y - z = \ \ 11 \\ \ \ x + \ \ y \qquad = -20 \\ 3x + 2y - z = \ \ \ 3 \end{cases}$$

La tercera ecuación contradice lo que se obtiene sumando las otras dos. El sistema es **incompatible**.

No tiene solución.



Ejercicio propuesto 2 (pág. 31)

a) Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - \ \ y = 4 \end{cases}$$

b) Añade una tercera ecuación de modo que siga siendo compatible.

c) Añade una tercera ecuación de modo que sea incompatible.

d) Interpreta geométricamente lo que has hecho en cada caso.

1.3.- SISTEMAS ESCALONADOS

Los siguientes sistemas son extraordinariamente fáciles de resolver:

$$\begin{cases} 2x+3y=14 \\ 5y=10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-3y+2z=7 \\ 5y-z=6 \\ 3z=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-t=5 \\ y+z=8 \\ z+3t=11 \\ 2t=6 \end{cases}$$

De abajo arriba, vamos obteniendo el valor de cada incógnita que, sustituida en las anteriores ecuaciones, permite seguir el proceso. Estos sistemas se llaman **escalonados**.

También es escalonado el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-t=5 \\ y+z=8 \\ z+3t=11 \end{array}\right\}$$

Al tener más incógnitas que ecuaciones, tomaremos una de las incógnitas como parámetro. Por ejemplo, $t=\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Así, tendremos:

$z=11-3t=11-3\lambda$

$y=8-z=8-(11-3\lambda)=-3+3\lambda$

$x=5+t-2y=5+\lambda-2(-3+3\lambda)=5+\lambda+6-6\lambda=11-5\lambda$

Para cada valor numérico que demos a λ, obtendremos los correspondientes valores de x, y, z, t.

Por ejemplo:

para $\lambda = 0$ se obtiene $x = 11$, $y = -3$, $z = 11$, $t = 0$

para $\lambda = 1$ se obtiene $x = 6$, $y = 0$, $z = 8$, $t = 1$

Ejercicio propuesto 2 (pág. 32)

¿Son escalonados los siguientes sistemas? Resuélvelos.

a) $\begin{cases} \quad 2y + z = 1 \\ \quad 2y \quad\ = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x \quad - z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y \quad = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \quad\quad z + \ t = 3 \\ \quad y + 3z - 2t = 4 \\ \quad\quad 2z \quad = 2 \\ x \quad - z + 2t = 5 \end{cases}$

1.4.- MÉTODO DE GAUSS

El **método de Gauss** consiste en transformar un sistema de ecuaciones lineales en otro escalonado. Para ello "hacemos ceros" sometiendo las ecuaciones a dos transformaciones elementales:

- Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero.
- Sumar a una ecuación otra multiplicada por un número.

El proceso se realiza muy ventajosamente si, en lugar de las ecuaciones, utilizamos exclusivamente los números (coeficientes y términos independientes) estructurados en matrices.

Al finalizar el proceso, o en algún paso intermedio, podemos encontrarnos con uno de los siguientes casos:

a) *Una fila de ceros*. Corresponde a una **ecuación trivial** y podemos prescindir de ella:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow 0x + 0y + \ldots + 0t = 0$$

b) *Dos filas iguales o proporcionales*. Corresponden a ecuaciones equivalentes y podemos prescindir inmediatamente de una de ellas:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 15 & -6 & 18 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

c) *Una fila de ceros, salvo el último número* -que corresponde al término independiente- *distinto de cero*:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & \square \end{array}\right) \Leftrightarrow 0x + 0y + \ldots + 0t = \square$$

($\square$ es un número distinto de cero)

Evidentemente, se trata de una ecuación imposible. En tal caso, reconocemos el sistema como incompatible.

Distintos tipos de sistemas de ecuaciones

Al finalizar el proceso, podemos llegar a uno de los siguientes casos:

I. $$\left(\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & \square & \square & \square & \square \\ 0 & \blacksquare & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \blacksquare & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \square \end{array}\right)$$

$\blacksquare$ un número distinto de cero

$\square$ un número cualquiera

Hay tantas ecuaciones válidas como incógnitas. Paso a paso, vamos obteniendo un valor numérico para cada incógnita.

Es, por tanto, un **sistema compatible determinado**.

II. $$\left(\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & \square & \square & \square & \square \\ 0 & \blacksquare & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \blacksquare & \square & \square \end{array}\right)$$

Hay menos ecuaciones válidas que incógnitas.

Las incógnitas que están de más se pasan al segundo miembro, con lo que el valor de las otras se dará en función de ellas.

El sistema es **compatible indeterminado**. Su solución general vendrá dada con tantos parámetros como incógnitas hayamos pasado al segundo miembro.

III. $$\left(\begin{array}{ccccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \blacksquare \end{array}\right)$$

La ecuación señalada no se puede cumplir nunca.

El sistema es **incompatible**.

Ejercicio resuelto 1 (pág. 35)

Resolver por el método de Gauss el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x-5y+3z=4 \\ x-2y+z=3 \\ 5x+y+7z=11 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \equiv (-5)F_1+F_3]{F_2 \equiv (-2)F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \equiv 11F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & -26 \end{array}\right)$$

Ya está el sistema puesto en forma escalonada.

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=3 \\ -y+z=-2 \\ 13z=-26 \end{array}\right\}$$

El sistema es **compatible determinado**. Lo resolvemos:

$$13z=-26 \rightarrow z=-2$$

$$y=z+2 \rightarrow y=-2+2=0$$

$$x=3+2y-z=3+2\cdot 0-(-2)=5$$

Solución: $x=5$, $y=0$, $z=-2$

Ejercicio resuelto 2 (pág. 36)

Resolver por el método de Gauss el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 3y + 7z = 10 \\ 5x - y + z = 8 \\ x + 4y - 10z = -11 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & -10 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \equiv (-1)F_1 + F_3]{F_2 \equiv (-5)F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 14 & -34 & -42 \\ 0 & 7 & -17 & -21 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Eliminanos } F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 7 & -17 & -21 \end{array}\right)$$

Eliminamos la segunda ecuación porque es proporcional a la tercera. El sistema ya está escalonado.

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + 7z = 10 \\ 7y - 17z = -21 \end{array}\right\}$$

El sistema es **compatible indeterminado**. Lo resolvemos:

$$z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$y = \frac{-21 + 17z}{7} = \frac{-21 + 17\lambda}{7}$$

$$x = 10 + 3y - 7z = 10 + 3\left(\frac{-21 + 17\lambda}{7}\right) - 7\lambda = 10 + \frac{-63 + 51\lambda}{7} - 7\lambda =$$

$$= \frac{70 - 63 + 51\lambda - 49\lambda}{7} = \frac{7 + 2\lambda}{7}$$

La *solución* es:

$$\left\{(x, y, z) = \left(\frac{7 + 2\lambda}{7}, \ \frac{-21 + 7\lambda}{7}, \ \lambda\right), \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Ejercicio resuelto 3 (pág. 36)

Resolver por el método de Gauss el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x-3y-2z=7 \\ 2x-y+15z=3 \\ x-8y-21z=11 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 15 & 3 \\ 1 & -8 & -21 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \equiv (-1)F_1 + F_3]{F_2 \equiv (-2)F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 19 & -11 \\ 0 & -5 & -19 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \equiv F_2 + F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 19 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

La fila $\left(0 \quad 0 \quad 0 \,|\, -7\right)$ representa la ecuación $0x+0y+0z=-7$, que no tiene solución. El sistema es **incompatible**.

Ejercicio propuesto 2 (pág. 36)

Resolver mediante el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x-y+2z=2 \\ -x+3y+z=3 \\ x+y+5z=7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-y+w=0 \\ x-2y+z=0 \\ 5x-y+z+w=0 \\ 5x-2y-z+2w=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-y+w=9 \\ x-2y+z=11 \\ 5x-y+z+w=24 \\ 5x-2y-z+2w=0 \end{cases}$

1.5.- DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

$$\left.\begin{array}{r} x+\qquad y+kz=\quad 1 \\ kx+(k-1)y+\ \ z=\quad k \\ x+\qquad y+\ \ z=k+1 \end{array}\right\}$$

Esto, más que un sistema de ecuaciones, es un conjunto de ellas.

Para cada valor del parámetro k, hay un sistema de ecuaciones distinto.

De esos infinitos sistemas, es posible que unos sean compatibles, y otros, incompatibles. Discutir el sistema **dependiente del parámetro**, es reconocer los valores de k para los que el sistema es de un tipo u otro.

Discutir un sistema de ecuaciones dependiente de uno o más parámetros es identificar para qué valores de los parámetros el sistema es compatible, distinguiendo los casos en los que es determinado o indeterminado.

Ejercicio resuelto 1 (pág. 37)

Discutir y resolver, cuando se pueda, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+\qquad y+kz=\quad 1 \\ kx+(k-1)y+\ \ z=\quad k \\ x+\qquad y+\ \ z=k+1 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ k & k-1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k+1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3\equiv(-1)F_1+F_3]{F_2\equiv(-k)F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & 1-k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & k \end{array}\right)$$

- Si $k=1$, la última fila es $\left(0\quad 0\quad 0\,|\,1\right)$. El sistema es incompatible.

- Si $k \neq 1$, entonces:

$$z = \frac{k}{1-k} \qquad y = \left(1-k^2\right)\frac{k}{1-k} = k^2 + k \qquad x = \frac{k^3 - k^2 - 2k + 1}{1-k}$$

Es decir, para cualquier $k \neq 1$, el sistema es compatible determinado.

Solución: $\left(\dfrac{k^3 - k^2 - 2k + 1}{1-k},\ k^2 + k,\ \dfrac{k}{1-k}\right)$

Atención: No hay infinitas soluciones, sino infinitos sistemas, uno para cada valor de k. Y cada uno de ellos tienes solución única, salvo el correspondiente a $k = 1$, que no tiene solución. Por ejemplo, para $k = 2$, el sistema es:

$$\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Su *solución* es: $x = -1$, $y = 6$, $z = -2$

Ejercicio propuesto 2 (pág. 37)

Discute estos sistemas de ecuaciones en función del parámetro k:

a) $\begin{cases} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ x + 2y = k \end{cases}$

Ejercicios: 21, 24 y 25 pág. 43,

26, 27, 30, 31 y 32 pág. 44