

## Unidad 10: CALCULO DE PROBABILIDADES

### 10.1.- EXPERIENCIAS ALEATORIAS. SUCESOS

**Experiencia aleatoria** es aquella cuyo resultado depende del azar.

*Ejemplo:* lanzar un dado sobre una mesa. Ignoramos qué cara quedará arriba. El resultado depende del azar.

**Suceso aleatorio** es un acontecimiento que ocurrirá o no dependiendo del azar.

*Ejemplo:* número de personas que acudirán a un gran almacén.

#### Espacio muestral

Se llama **espacio muestral** al conjunto de todos los posibles resultados de una experiencia aleatoria.

*Ejemplo:* En un dado,  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

En una moneda,  $E = \{c, +\}$

#### Sucesos

Se llama **suceso** a cualquier subconjunto de E.

Los elementos de E se llaman **sucesos individuales** o **sucesos elementales**. También se llaman **casos**.

También son sucesos el **suceso vacío** o **suceso imposible**,  $\emptyset$ , y el propio E, **suceso seguro**. Al conjunto de todos los sucesos de una experiencia aleatoria lo llamaremos  $\mathcal{S}$ .

Si  $E$  tiene un número finito,  $n$ , de elementos, el número de sucesos de  $E$  es  $2^n$ .

**Ejemplo:** En un dado,  $\{1, 2\}$ ,  $\{2, 4, 6\}$ ,  $\{3, 5\}$  son sucesos.

$\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ , ... son sucesos elementales.

Hay  $2^6 = 64$  sucesos.

Al lanzar una moneda hay  $2^2 = 4$  sucesos:

$$\mathcal{S} = \{\emptyset, \{c\}, \{+\}, \{c, +\}\}$$

### Ejercicio 1 (pág. 240)

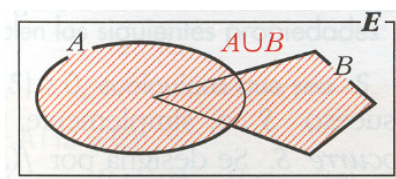
Numeramos con 1, 2, 3 y 4 las cuatro caras alargadas de una regleta. Dejamos caer la regleta y anotamos el número de la cara superior.

- ¿Cuál es el espacio muestral?
- Escribe un suceso elemental y tres que no sean elementales.
- ¿Cuántos sucesos tiene esta experiencia?

### Operaciones con sucesos

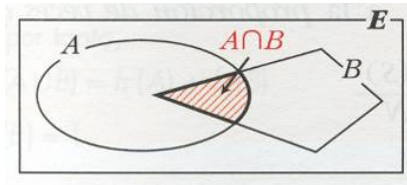
Dados dos sucesos,  $A$  y  $B$ , se llama:

**Unión.**  $A \cup B$  (se lee  $A$  unión  $B$ ) es el suceso formado por todos los elementos de  $A$  y de  $B$ .



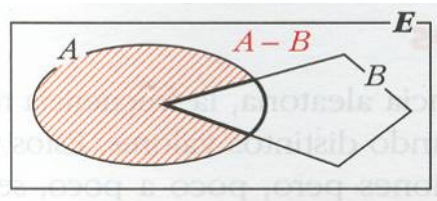
El suceso  $A \cup B$  se verifica cuando ocurre uno de los dos, A o B, o ambos.

**Intersección.**  $A \cap B$  (se lee A intersección B) es el suceso formado por todos los elementos que son, a la vez, de A y de B.



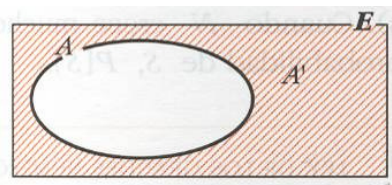
El suceso  $A \cap B$  se verifica cuando ocurren simultáneamente A y B.

**Diferencia.**  $A - B$  (se lee A menos B) es el suceso formado por todos los elementos de A que no son de B.



$A - B$  se verifica cuando lo hace A y no B.

**Complementario.** El suceso  $A' = E - A$  se llama suceso contrario o complementario de A. También lo denotamos por  $\bar{A}$ .



El suceso  $\bar{A}$  se verifica siempre y cuando no se verifique A.

**Sucesos incompatibles.** Dos sucesos, A y B, se llaman incompatibles cuando no tienen ningún elemento común. Es decir, cuando  $A \cap B = \emptyset$ .

Los sucesos incompatibles no se pueden verificar simultáneamente.

### Algunas propiedades importantes

- Si  $A \subset B$ , entonces  $A \cup B = B$  y  $A \cap B = A$
- Leyes de Morgan:

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$  (el contrario de la unión es igual a la intersección de los contrarios)

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$  (el contrario de la intersección es igual a la unión de los contrarios)

### Ejercicio

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$$

$$A = \{b, c, d, f, g, h\}, \quad B = \{a, b, c, d\}, \quad C = \{a, b\}$$

Hallar:  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $\overline{A \cup B}$ ,  $\overline{A \cap B}$ ,  $\bar{A} \cup \bar{B}$ ,  $\bar{A} \cap \bar{B}$ ,  $B \cup C$ ,  $B \cap C$

$$A \cup B = \{a, b, c, d, f, g, h\}, \quad \overline{A \cup B} = \{e, i\}$$

$$A \cap B = \{b, c, d\}, \quad \overline{A \cap B} = \{a, e, f, g, h, i\}$$

$$\bar{A} = \{a, e, i\}, \quad \bar{B} = \{e, f, g, h, i\}$$

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \{a, e, f, g, h, i\}, \quad \bar{A} \cap \bar{B} = \{e, i\}$$

Observamos que  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$  y que  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ .

Como  $C \subset B$ ,  $B \cup C = B$  y  $B \cap C = C$

## Ejercicio 2 (pág. 241)

Consideramos la experiencia "lanzar un dado". A partir de los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{1, 3, 5\}, \quad C = \{2, 4\}$$

a) Obtén los conjuntos  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ .

b) Obtén los conjuntos  $\overline{A \cup B}$ ,  $\overline{A \cap B}$ ,  $\bar{A} \cup \bar{B}$ ,  $\bar{A} \cap \bar{B}$ , y comprueba que se cumplen las leyes de Morgan.

c) Calcula  $B \cup C$  y  $B \cap C$ , y razona los resultados.

Ejercicios: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 pág. 257

## 10.2.- FRECUENCIA Y PROBABILIDAD

### Frecuencias absoluta y relativa de un suceso

Realizamos  $N$  veces una experiencia aleatoria.

Se llama **frecuencia absoluta** de un suceso  $S$  o, simplemente, frecuencia de  $S$ , al *número de veces que ocurre  $S$* . Se designa por  $f(S)$ .

Se llama **frecuencia relativa** de  $S$  a la proporción de veces que ocurre  $S$ .

$$fr(S) = \frac{f(S)}{N}$$

## Ley de los grandes números

Al realizar reiteradamente una experiencia aleatoria, la frecuencia relativa de un cierto suceso,  $fr(S)$ , va tomando distintos valores. Estos valores al principio sufren grandes oscilaciones pero, poco a poco, se van estabilizando (oscilan cada vez menos). Cuando  $N$  crece mucho, se aproximan a un cierto valor que es la **probabilidad de S**,  $p(S)$ .

$$\lim_{N \rightarrow \infty} fr(S) = p(S) \quad \text{Ley de los grandes números}$$

*Ejemplo:* Al lanzar un dado se obtienen los valores de  $fr(3)$  para  $N = 20, 40, 60, 80, 100, 120, \dots$

Los valores de  $fr(3)$  se van estabilizando en torno a  $\frac{1}{6} = 0,166\dots$

[Comprobación experimental de la ley de los grandes números](#)

## Propiedades de las probabilidades:

Es claro que las frecuencias relativas cumplen las siguientes propiedades:

- $fr(S) \geq 0$ , cualquiera que sea  $S$
- Si  $A \cap B = \emptyset$ , entonces  $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$  y, por tanto,  $fr(A \cup B) = fr(A) + fr(B)$
- $fr(E) = 1$

Las propiedades de los distintos sucesos de una misma experiencia aleatoria deben cumplir las propiedades que damos a continuación. Las tres primeras se imponen (es decir, son **axiomas**), inspirándonos en las propiedades de las frecuencias relativas. Las siguientes se deducen de las primeras (es decir, son **teoremas**).

### **Axiomas:**

La probabilidad de cada suceso es un número. Se han de cumplir los siguientes axiomas:

**A.1** Cualquiera que sea el suceso  $S$ ,  $p(S) \geq 0$

**A.2** Si dos sucesos son incompatibles, la probabilidad de su unión es igual a la suma de sus probabilidades.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

**A.3** La probabilidad total es 1:  $p(E) = 1$

En esencia, estas tres propiedades indican que la cantidad total de probabilidad es igual a 1 y se reparte aditivamente entre los distintos sucesos.

### **Teoremas:**

**T.1**  $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

**T.2**  $p(\emptyset) = 0$

**T.3** Si  $A \subset B$ , entonces  $p(B) = p(A) + p(B - A)$

**T.4** Si  $A \subset B$ , entonces  $p(A) \leq p(B)$

**T.5** Si  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , son incompatibles dos a dos, entonces:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_k)$$

**T.6**  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

**T.7** Si el espacio muestral  $E$  es finito y un suceso es

$S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , entonces:

$$p(S) = p(x_1) + p(x_2) + \dots + p(x_k)$$

### Ejercicio

Demostrar los teoremas anteriores.

### Ejercicio 1 (pág. 243)

Conocemos las siguientes probabilidades:

$$p(A) = 0,4 \quad p(B) = 0,7 \quad p(\overline{A \cup B}) = 0,2$$

Calcula  $p(\overline{A \cap B})$ ,  $p(A \cap B)$ ,  $p(A \cup B)$ .

### Ejercicio 2 (pág. 243)

Sabemos que:  $p(M \cup N) = 0,6$     $p(M \cap N) = 0,1$     $p(\overline{M}) = 0,7$

Calcula  $p(M)$ ,  $p(N)$

Ejercicios: 10 y 11 pág. 257

### 10.3.- LEY DE LAPLACE

La propiedad T.7 del apartado anterior permite calcular la probabilidad de un suceso  $S$  conociendo las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.

Pero si el espacio muestral consta de  $n$  sucesos elementales equiprobables (todos ellos con la misma probabilidad  $1/n$ ), entonces la probabilidad de  $S$  sólo depende del número de sucesos elementales que lo componen:

$$p(S) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \text{ (tantos sumandos como elementos tiene } S \text{)}$$

#### Ley de Laplace

Si  $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  y  $p(x_1) = p(x_2) = \dots = p(x_n)$ , entonces:

$$p(S) = \frac{\text{número de elementos de } S}{n}, \text{ es decir,}$$

$$p(S) = \frac{\text{número de "casos favorables" a } S}{\text{número de "casos posibles"}}$$

Se dice que un instrumento aleatorio es *de Laplace* cuando la probabilidad de todos sus sucesos elementales (casos) es la misma. Por ejemplo, un dado correcto, una moneda, una baraja, ...

#### Ejercicio 1 (pág. 244)

En una baraja de 40 cartas, hallar:

a)  $p(\text{as})$

b)  $p(\text{oros})$

### **Ejercicio 2** (pág. 244)

En una baraja hemos suprimido varias cartas. Entre las que quedan, se dan las siguientes probabilidades de ser extraídas:

$$p(\text{rey}) = 0,15 \quad p(\text{bastos}) = 0,3 \quad p(\text{ni rey ni bastos}) = 0,6$$

- a) ¿Está entre ellas el "rey de bastos"? En caso afirmativo, da su probabilidad?
- b) ¿Cuántas cartas hay?

### **Ejercicio 2** (pág. 245)

¿Cuál es la probabilidad de obtener 12 al multiplicar los resultados de dos dados correctos?

### **Ejercicio 3** (pág. 245)

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados correctos la diferencia de sus puntuaciones sea 2?

## 10.4.- PROPABILIDAD CONDICIONADA. SUCESOS INDEPENDIENTES

Dados dos sucesos  $A$  y  $C$ , se llama **probabilidad de  $A$  condicionada a  $C$**  y se escribe  $p(A/C)$  a:

$$p(A/C) = \frac{p(A \cap C)}{p(C)}$$

Mide la proporción de veces que ocurre  $A$  de entre las que ocurre  $C$ .

De la expresión anterior se deduce que:

$$p(A \cap C) = p(C) \cdot p(A/C)$$

Dos sucesos,  $A$  y  $C$ , se dice que son **independientes** cuando:

$$p(A/C) = p(A) \quad \text{y} \quad p(C/A) = p(C)$$

Cuando dos sucesos son independientes, la probabilidad de su intersección es igual al producto de sus probabilidades.

$$A \text{ y } C \text{ independientes} \Rightarrow p(A \cap C) = p(A) \cdot p(C)$$

**Ejemplo:** Si en una bolsa tenemos las siguientes bolas



se tienen las siguientes probabilidades:

$$p(\text{par}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad p(\text{par} / \text{verde}) = \frac{1}{3}$$

Sabiendo que la bola es verde, la probabilidad de que sea par es distinta de  $\frac{1}{2}$ . Por eso, los sucesos "verde" y "par" no son independientes.

$$p(\text{par}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad p(\text{par} / \text{roja}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Sabiendo que la bola es roja, la probabilidad de que sea par sigue siendo  $\frac{1}{2}$ . Por eso, los sucesos "roja" y "par" son independientes.

### Estudio de probabilidades en tablas de contingencia

Se ha seguido la pista a 100 000 coches, durante un año, de tres marcas distintas: SETA, VOVO y ADI. Unos han tenido accidente serio (AC) y otros no (NO AC).

Se reparten, como ves, en la siguiente tabla:

	SETA	VOVO	ADI
AC	400	200	400
NO AC	49 600	19 800	29 600

Una tabla de este tipo se llama **tabla de contingencia**. El colectivo total (coches) se reparte según dos características (marcas y si han tenido o no accidente). El estudio de los datos permite averiguar las relaciones entre ambas características.

Para analizar una tabla de contingencia debemos empezar completándola con las sumas parciales y con la suma total:

	SETA	VOVO	ADI	Total
AC	400	200	400	1 000
NO AC	49 600	19 800	29 600	99 000
Total	50 000	20 000	30 000	100 000

Las sumas parciales nos permiten ver que, por ejemplo, hay 20 000 coches de la marca VOVO. O que hay 1 000 coches que han tenido accidente.

Si entre los mil coches que han tenido accidente, AC, elegimos uno al azar, es fácil hallar las probabilidades condicionadas:

$$p(\text{SETA} / \text{AC}) = \frac{400}{1000} = 0,4 \quad (\text{Sabiendo que el coche ha tenido accidente, ¿cuál es la probabilidad de que sea SETA?})$$

Análogamente,

$$p(\text{VOVO} / \text{AC}) = \frac{200}{1000} = 0,2 \quad p(\text{ADI} / \text{AC}) = \frac{400}{1000} = 0,4$$

También se puede calcular la probabilidad de que un coche de una cierta marca tenga accidente:

$$p(\text{AC} / \text{SETA}) = \frac{400}{50000} = 0,008$$

$$p(\text{AC} / \text{VOVO}) = \frac{200}{20000} = 0,01$$

$$p(\text{AC} / \text{ADI}) = \frac{400}{30000} = 0,0133$$

Estos resultados hacen ver que la marca más segura es SETA, y la menos, ADI.

Comparando estas últimas probabilidades condicionadas con la probabilidad total,  $p(AC) = \frac{1000}{100000} = 0,01$ , advertimos que los sucesos VOVO y AC son independientes, mientras que SETA y ADI no son independientes con AC.

### Ejercicio 1 (pág. 247)

Observa las bolas que hay en la urna.



- a) Completa el cuadro de doble entrada en el que se reparten las bolas según el color (V, R, N) y el número (1, 2).

	V	R	N	Total
1		2		
2		3		
Total		5		

- b) Calcula la probabilidad de ROJO, NEGRO, VERDE, 1 y 2, sin más que observar la composición de la urna.
- c) Comprueba que las probabilidades obtenidas en b) se pueden obtener sumando filas o columnas del cuadro formado en a).
- d) Calcula las probabilidades condicionadas:  
 $p(1/\text{rojo})$ ,  $p(1/\text{verde})$ ,  $p(1/\text{negro})$ ,  $p(2/\text{rojo})$ ,  
 $p(2/\text{verde})$ ,  $p(2/\text{negro})$ ,  $p(\text{rojo}/1)$ ,  $p(\text{verde}/1)$ .

- e) Di si alguno de los caracteres ROJO, NEGRO, VERDE es independiente de 1 o de 2.

## 10.5.- PRUEBAS COMPUESTAS

Hay experiencias en las que fácilmente podemos distinguir dos o más etapas. Se llaman **pruebas compuestas**. En ellas, el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos se simplifica mucho calculando las probabilidades de sus componentes.

Dos pruebas compuestas son **independientes** cuando el resultado de una no influye en la otra. Si no es así, se llaman **dependientes**.

*Ejemplo 1.* Lanzamos una moneda y un dado. Es evidente que el resultado de una no influye en la otra. Son independientes.

*Ejemplo 2.* Extraemos dos cartas de una baraja. El resultado de la segunda sí depende de la primera (por ejemplo, si la primera es AS, es menos probable que la segunda lo sea). Son dependientes.

### Experiencias independientes

Analicemos el ejemplo 1 anterior.

$$p(C, 3) = p(C) \cdot p(3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

La probabilidad del **suceso compuesto** es igual al producto de las probabilidades de los sucesos componentes. Por ejemplo:

$$p(C \text{ y par}) = p(C) \cdot p(\text{par}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Se dice que dos o más pruebas son independientes cuando el resultado de cada una de ellas no influye en las probabilidades de los distintos resultados de las otras. Por tanto, los sucesos correspondientes a la primera son independientes de los sucesos correspondientes a la segunda.

Si  $n$  pruebas son independientes y los sucesos  $S_1, S_2, \dots, S_n$  corresponden, respectivamente, a cada una de ellas se cumple que:

$$\begin{aligned} p(S_1 \text{ en la } 1^{\text{a}} \text{ y } S_2 \text{ en la } 2^{\text{a}} \text{ y } \dots \text{ y } S_n \text{ en la } n\text{-ésima}) &= \\ &= p(S_1) \cdot p(S_2) \cdot \dots \cdot p(S_n) \end{aligned}$$

### **Ejercicio 1** (pág. 248)

Calcula la probabilidad de obtener TRES CUATROS al lanzar tres dados.

### **Ejercicio 2** (pág. 248)

Calcula la probabilidad de NINGÚN SEIS al lanzar cuatro dados.

### **Ejercicio 3** (pág. 248)

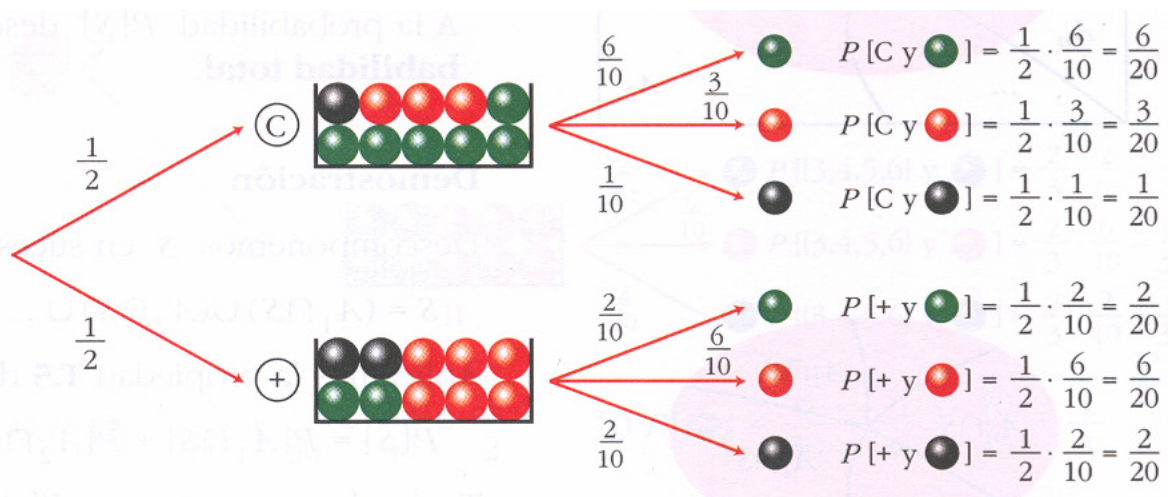
Calcula la probabilidad de obtener ALGÚN SEIS al lanzar cuatro dados. (ALGÚN SEIS es el suceso contrario de NINGÚN SEIS).

## Experiencias dependientes

Tenemos una moneda y dos urnas con bolas. Lanzamos la moneda y si sale cara, extraemos una bola de I y si sale cruz, extraemos una bola de II.



Describimos mediante un diagrama en árbol, la experiencia compuesta e incluimos las correspondientes probabilidades:



Observemos que las probabilidades de las segundas flechas son probabilidades condicionadas.

Por ejemplo,  $p(\bullet / C) = \frac{6}{10}$ .

Por tanto:  $p(C \text{ y } \bullet) = p(C) \cdot p(\bullet / C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{20}$

Dos experiencias son **dependientes** cuando el resultado de la primera influye en las probabilidades de los sucesos de la segunda. Las probabilidades de sucesos compuestos se obtienen así:

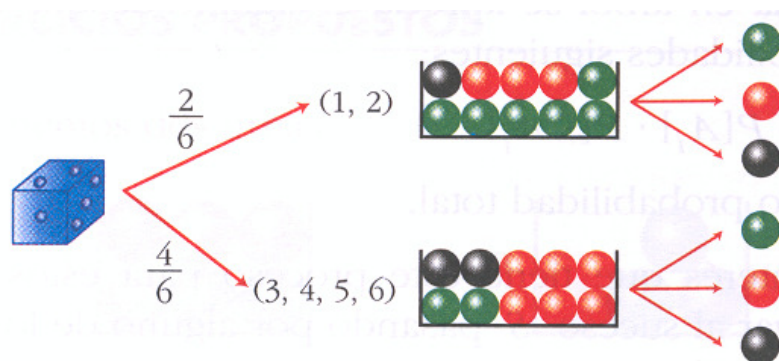
$p(S_1 \text{ en la } 1^{\text{a}} \text{ y } S_2 \text{ en la } 2^{\text{a}}) = p(S_1) \cdot p(S_2/S_1)$ . Es decir:  
 $p(S_1 \text{ en la } 1^{\text{a}}) \cdot p(S_2 \text{ en la } 2^{\text{a}} \text{ supuesto que ocurrió } S_1 \text{ en la } 1^{\text{a}})$

Si se encadenan más de dos experiencias dependientes, las probabilidades de los sucesos compuestos se obtienen análogamente. Por ejemplo, para tres pruebas:

$p(S_1 \text{ en la } 1^{\text{a}} \text{ y } S_2 \text{ en la } 2^{\text{a}} \text{ y } S_3 \text{ en la } 3^{\text{a}}) =$   
 $= p(S_1) \cdot p(S_2/S_1) \cdot p(S_3/S_1 \text{ y } S_2)$

### Ejercicio 5 (pág. 249)

Tenemos un dado y las dos urnas descritas abajo.



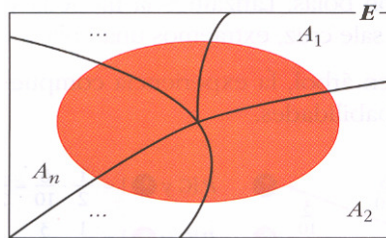
Lanzamos el dado. Si sale 1 ó 2, vamos a la urna I. si sale 3, 4, 5 ó 6, acudimos a la urna II. Extraemos una bola de la urna correspondiente.

- Completa las probabilidades en el diagrama en árbol.
- Halla:  $p(\{3, 4, 5, 6\} \text{ y } \bullet)$ ,  $p(\bullet/1)$ ,  $p(\bullet/5)$ ,  $p(2 \text{ y } \bullet)$ .

Ejercicios: 12, 13, 14, 15, 16 y 17 pág. 258

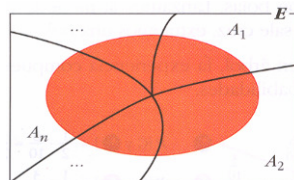
## 10.6.- PROBABILIDAD TOTAL

Supongamos que tenemos  $n$  sucesos,  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , incompatibles dos a dos y tales que  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$ .



Si consideramos un suceso cualquiera  $S$ , éste podrá expresarse de la siguiente forma:

$$S = (A_1 \cap S) \cup (A_2 \cap S) \cup \dots \cup (A_n \cap S)$$



Como  $A_1 \cap S, A_2 \cap S, \dots, A_n \cap S$  son incompatibles dos a dos, podemos aplicar la propiedad T.5 de las probabilidades:

$$\begin{aligned} p(S) &= p[(A_1 \cap S) \cup (A_2 \cap S) \cup \dots \cup (A_n \cap S)] = \\ &= p(A_1 \cap S) + p(A_2 \cap S) + \dots + p(A_n \cap S) \end{aligned}$$

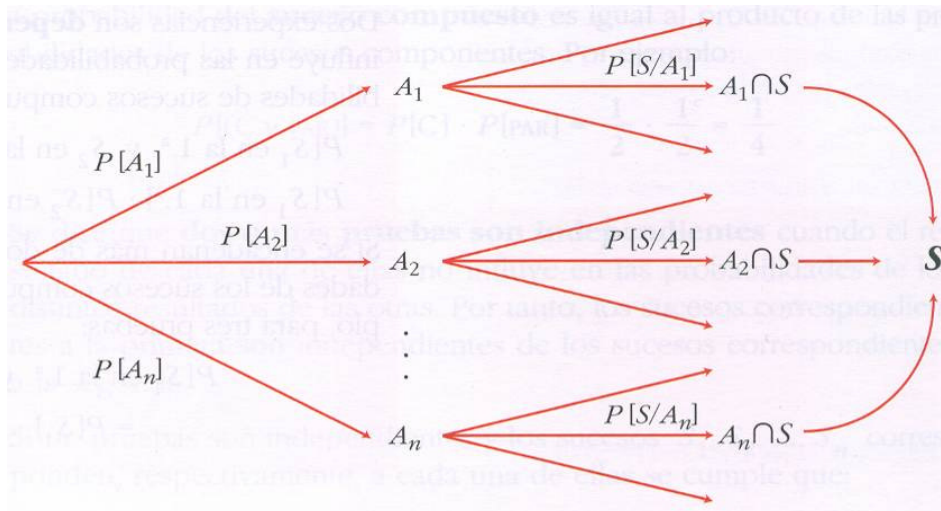
Sabemos que  $p(A_k \cap S) = p(A_k) \cdot p(S/A_k)$ . Por tanto, si sustituimos en la expresión anterior, tendremos que:

$$p(S) = p(A_1) \cdot p(S/A_1) + p(A_2) \cdot p(S/A_2) + \dots + p(A_n) \cdot p(S/A_n)$$

A la probabilidad  $p(S)$  descompuesta de este modo se la llama **probabilidad total**.

## La probabilidad total en el caso de pruebas sucesivas

El resultado anterior es especialmente útil para experiencias compuestas que se suceden en el tiempo. Vamos a ilustrarlo en el caso de dos etapas sucesivas:



Los sucesos  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , son de la primera etapa e incompatibles dos a dos.  $S$  es un suceso de la segunda etapa. Se puede llegar a  $S$  pasando por  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Observando el diagrama en árbol se aprecia el significado que tienen, en este caso, las probabilidades siguientes:

$$p(S/A_k), \quad p(A_k \cap S) = p(A_k) \cdot p(S/A_k)$$

así como la  $p(S)$  como probabilidad total.

### Ejercicio resuelto 1 (pág. 251)

Lanzamos un dado. Si sale 1 ó 2 extraemos una bola de la urna I, si sale 3, 4, 5 ó 6 extraemos bola de la urna II.



Urnas I



Urnas II

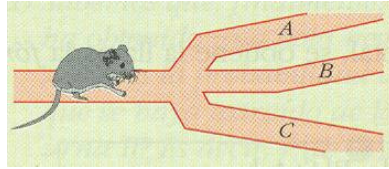
Hallar: a)  $p(\bullet)$

b)  $p(\bullet)$

c)  $p(\bullet)$

## Ejercicio resuelto 2 (pág. 251)

Un gato persigue a un ratón. Éste puede entrar en uno de los callejones A, B o C.



En cada uno de ellos puede cazarlo, +, o no. Se sabe:

$$p(\text{entre por } A) = p(A) = 0,3 \quad p(B) = 0,5 \quad p(C) = 0,2$$

$$p(\text{lo cace habiendo entrado por } A) = p(+/A) = 0,4$$

$$p(+/B) = 0,6 \quad p(+/C) = 0,1$$

Calcular la probabilidad de que el gato cace al ratón.

## Ejercicio 1 (pág. 251)

Tenemos dos urnas:



La experiencia consiste en extraer una bola de I, introducirla en II, remover y extraer, finalmente, una bola de II. Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea:

a) roja

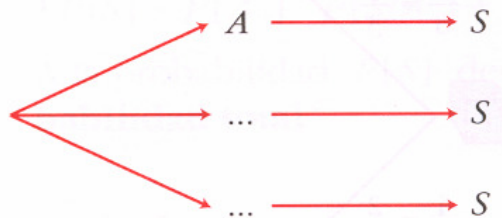
b) verde

c) negra

## 10.7.- PROBABILIDADES "A POSTERIORI". FÓRMULA DE BAYES.

En una experiencia compuesta de dos, si  $A$  es un suceso correspondiente a la primera y  $S$  es un suceso correspondiente a la segunda, el significado de la probabilidad condicional  $p(A/S)$  es interesante.

Se puede llegar al suceso  $S$  pasando por  $A$  o por otros sucesos. Si sabemos que finalmente ha ocurrido  $S$ , ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido "pasando por  $A$ "?  $p(A/S)$ .



Es decir, de las distintas formas en que se puede llegar a  $S$ , ¿en qué proporción de ellas se pasa por  $A$ ?

Se puede demostrar fácilmente que:

$$p(A/S) = \frac{p(A) \cdot p(S/A)}{p(S)}$$

Veámoslo:

Sabemos que:

$$\left. \begin{array}{l} p(A \cap S) = P(A) \cdot P(S/A) \\ p(A \cap S) = P(S) \cdot P(A/S) \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) \cdot P(S/A) = P(S) \cdot P(A/S)$$

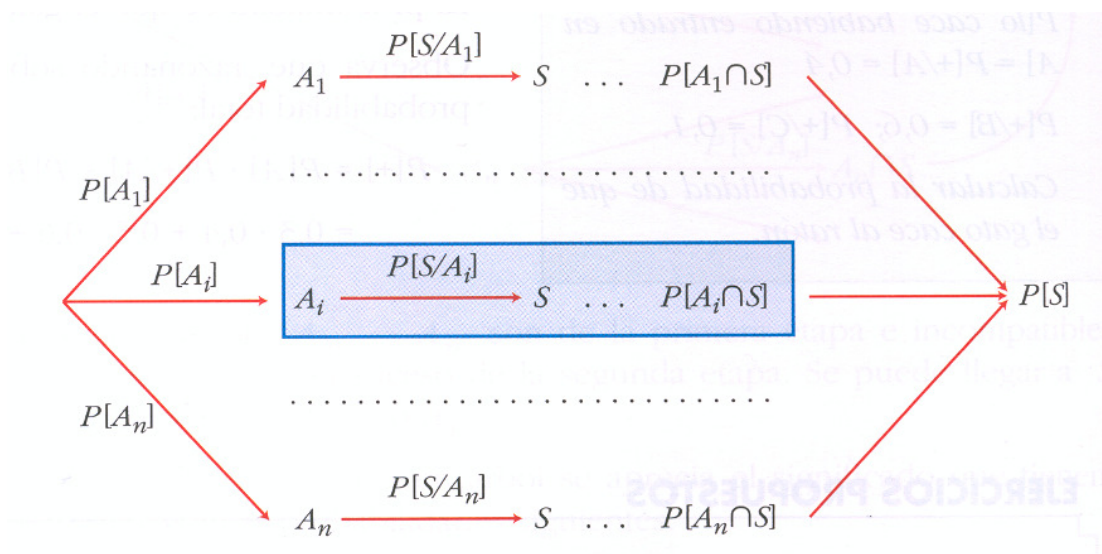
Despejando  $p(A/S)$  tendremos que:

$$p(A/S) = \frac{p(A) \cdot p(S/A)}{p(S)}$$

Si expresamos  $S$  como probabilidad total, se obtiene la llamada **fórmula de Bayes**:

$$p(A_i / S) = \frac{p(A_i) \cdot p(S / A_i)}{p(A_1) \cdot p(S / A_1) + p(A_2) \cdot p(S / A_2) + \dots + p(A_n) \cdot p(S / A_n)}$$

En la práctica, más que la fórmula, resulta muy útil seguir el proceso en un diagrama en árbol:



Si sabemos que ocurrió  $S$ , sobre el gráfico se obtiene que:

$$p(A_i / S) = \frac{p(A_i \cap S)}{p(S)}$$

### Ejercicio resuelto 1 (pág. 253)

Retomamos el problema del ratón y el gato que vimos en el ejercicio resuelto 2 del apartado anterior. Supongamos que vemos a un gato perseguir a un ratón. Al poco rato llega con él en la boca. ¿En cuál de los tres caminos lo habrá cazado?

**Nota:** Naturalmente, no sabremos dónde lo habrá cazado, pero sí podemos calcular la probabilidad de que lo haya hecho en un cierto callejón:  $p(A/+)$ ,  $p(B/+)$ ,  $p(C/+)$ .

### Ejercicio resuelto 2 (pág. 253)

Retomamos el problema del dado y las dos urnas resuelto en el apartado anterior.

- a) Sabemos que, finalmente, se ha obtenido una bola negra. ¿Cuál es la probabilidad de que se haya extraído de la urna II? Es decir,  $p(II/\bullet)$
- b)  $p(I/\bullet)$
- c)  $p(I/\circ)$

Ejercicios: 23, 24, 25, 27, 33, 34, 35, 36, 39, 40, 42, 50, 51  
pág. 258, 259, 260 y 261